

Übersicht Aussagenlogik und Prädikatenlogik:

(I) Der Kalkül des natürlichen Schließens (KNS):

- (I.1) elementare und abgeleitete Schlussregeln für die Aussagenlogik
- (I.2) elementare Schlussregeln für die Prädikatenlogik
- (I.3) abgeleitete Schlussregeln für die Aussagenlogik

(II) Theoreme

- (II.1) aussagenlogische Theoreme
- (II.2) prädikatenlogische Theoreme

(I.1) Elementare Schlussregeln KNS AL

Konjunktions-Einführung ($\wedge E$)		Konjunktions-Beseitigung ($\wedge B$)	
A	A	$A \wedge B$	$A \wedge B$
B	B		
-----	-----	-----	-----
$A \wedge B$	$B \wedge A$	A	B
Disjunktions-Einführung ($\vee E$)		Disjunktions-Beseitigung ($\vee B$)	
A	A	$A \vee B$	
-----	-----	$\underline{A}$ (H-Pr)	
$A \vee B$	$B \vee A$		
		C	
		$\underline{B}$ (H-Pr)	
			
		C	

		C	
Negations-Einführung ($\neg E$)		Negations-Beseitigung ($\neg B$)	
$\underline{A}$ (H-Pr)		$\neg \neg A$	
....		-----	
B		A	
....			
$\neg B$			

$\neg A$			
Konditional-Einführung ($\rightarrow E$)		Konditional-Beseitigung ($\rightarrow B$)	
$\underline{A}$ (H-Pr)		$A \rightarrow B$	
....		A	
B		-----	
-----		B	
$A \rightarrow B$			
Bikonditional-Einführung ($\leftrightarrow E$)		Bikonditional-Beseitigung ($\leftrightarrow B$)	
$A \rightarrow B$		$A \leftrightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
$B \rightarrow A$		-----	-----
-----		$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$
$A \leftrightarrow B$			

(I.2) Elementare Schlussregeln KNS PL

$\forall$-Einführung ($\forall E$) (Universelle Generalisierung)	$\forall$-Beseitigung ($\forall B$) (Universelle Instantiierung)
$\frac{v \quad \quad A}{\forall x A \ x/v}$	$\frac{\forall x A}{A \ a/x}$
$\exists$-Einführung ($\exists E$) (Existentielle Generalisierung)	$\exists$-Beseitigung ($\exists B$) (Existentielle Instantiierung)
$\frac{A}{\exists x A \ x/a}$	$\frac{\exists x A}{\begin{array}{l} w \quad \quad A \ w/x \\ \quad \quad \dots \\ \quad \quad B \\ \hline B \end{array}}$

(I.3) Abgeleitete Schlussregeln des KNS AL

(KR) Kettenschlussregel (a.: Hypothetischer Syllogismus – HS)

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \quad |- \quad A \rightarrow C$$

(IB) Indirekter Beweis

$$\neg A \rightarrow B, \neg A \rightarrow \neg B \quad |- \quad A$$

(MT) Modus Tollens

$$A \rightarrow B, \neg B \quad |- \quad \neg A$$

(KD) Klassisches Dilemma; a.: Fallunterscheidung

$$A \rightarrow B, \neg A \rightarrow B \quad |- \quad B$$

(EC) Ex Contradictione Sequitur Quodlibet

$$A, \neg A \quad |- \quad B$$

(EF) Ex Falso Sequitur Quodlibet

$$\neg A \quad |- \quad A \rightarrow B$$

(SMP) Spezieller Modus Ponens

$$A \leftrightarrow B, A \quad |- \quad B$$

(SMT) Spezieller Modus Tollens

$$A \leftrightarrow B, \neg A \quad |- \quad \neg B$$

(KS) Konjunktiver Syllogismus

$$\neg(A \wedge B), A \quad |- \quad \neg B$$

(DS) Disjunktiver Syllogismus

$$A \vee B, \neg A \quad |- \quad B$$

(DN) Doppelte Negation

$$A \quad |- \quad \neg \neg A$$

(II.1) wichtige Theoreme (Lehrsätze) der Aussagenlogik

1. Kommutativgesetze

$$\vdash p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p \quad (\text{KG1})$$

$$\vdash p \vee q \leftrightarrow q \vee p \quad (\text{KG2})$$

$$\vdash (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p) \quad (\text{KG3})$$

2. Assoziativgesetze

$$\vdash p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r \quad (\text{AG1})$$

$$\vdash p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r \quad (\text{AG2})$$

$$\vdash (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)) \leftrightarrow ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \quad (\text{AG3})$$

3. Klassische Tautologien

$$\vdash p \rightarrow p \quad (\text{ID - Identitätssatz})$$

$$\vdash \neg(p \wedge \neg p) \quad (\text{WD - Satz vom zu vermeidenden Widerspruch})$$

$$\vdash p \vee \neg p \quad (\text{AD - Satz vom ausgeschlossenen Dritten})$$

4. Inversionsgesetze

$$\vdash (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p) \quad (\text{KP - Kontraposition})$$

$$\vdash (p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \rightarrow \neg p)$$

$$\vdash (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$$

5. Distributivgesetze

$$\vdash p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$\vdash p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$\vdash (p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$$

$$\vdash (p \vee q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

6. de Morgansche Gesetze

$$\vdash \neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q \quad (\text{DM1})$$

$$\vdash \neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \quad (\text{DM2})$$

7. Gesetze zur Konnektorensubstitution

$$\vdash (p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg p \vee q$$

$$\vdash (p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$$

$$\vdash (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\vdash (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)$$

8. Absorptionsgesetze (a.: Verschmelzungsgesetze)

$$\vdash p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$$

$$\vdash p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$$

(II.2) wichtige Theoreme (Lehrsätze) der Prädikatenlogik

1. Gesetze der Quantoren-Negation

$$\vdash \exists x F(x) \leftrightarrow \neg \forall x \neg F(x)$$

$$\vdash \exists x \neg F(x) \leftrightarrow \neg \forall x F(x)$$

$$\vdash \neg \exists x F(x) \leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

$$\vdash \neg \exists x \neg F(x) \leftrightarrow \forall x F(x)$$

2. Gesetze der Quantoren-Distribution

$$\vdash \forall x (F(x) \wedge G(x)) \leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall x G(x)$$

$$\vdash \exists x (F(x) \vee G(x)) \leftrightarrow \exists x F(x) \vee \exists x G(x)$$

$$\vdash \forall x F(x) \vee \forall x G(x) \rightarrow \forall x (F(x) \vee G(x))$$

$$\vdash \exists x (F(x) \wedge G(x)) \rightarrow \exists x F(x) \wedge \exists x G(x)$$

$$\vdash \forall x (F(x) \rightarrow G(x)) \rightarrow (\forall x F(x) \rightarrow \forall x G(x))$$

$$\vdash \exists x (F(x) \rightarrow G(x)) \rightarrow (\forall x F(x) \rightarrow \exists x G(x))$$

3. Gesetze der Quantoren-(Un)Abhängigkeit

$$\vdash \forall x \forall y R(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x R(x, y)$$

$$\vdash \exists x \exists y R(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists x R(x, y)$$

$$\vdash \exists x \forall y R(x, y) \rightarrow \forall y \exists x R(x, y)$$

4. Gesetze der Quantoren-Bewegung

(Voraussetzung: x kommt in p nicht frei vor)

$$\vdash \exists x (p \rightarrow F(x)) \leftrightarrow (p \rightarrow \exists x F(x))$$

$$\vdash \forall x (p \rightarrow F(x)) \leftrightarrow (p \rightarrow \forall x F(x))$$

$$\vdash \exists x (F(x) \rightarrow p) \leftrightarrow (\forall x F(x) \rightarrow p)$$

$$\vdash \forall x (F(x) \rightarrow p) \leftrightarrow (\exists x F(x) \rightarrow p)$$

5. Weitere Quantorengesetze

$$\vdash \forall x \forall y R(x, y) \rightarrow \forall x R(x, x)$$

$$\vdash \forall x F(x) \rightarrow \exists x F(x)$$

$$\vdash \forall x F(x) \vee \exists x \neg F(x)$$